KLASY ROZSZERZEŃ PRZEMIENNYCH GRUP ALGEBRAICZNYCH

Dorota Blinkiewicz
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
dorota.blinkiewicz@amu.edu.pl

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią przemiennych grup algebraicznych. Jeśli A, $B \in \mathcal{C}$, to grupa $\mathrm{Ext}(A, B)$ rozszerzeń grupy A przez B jest definiowana albo poprzez bezpośrednią konstrukcję (patrz [1]) lub poprzez wzięcie funktora pierwszej pochodnej z funktora $\mathrm{Hom}(A, B)$ (patrz [3, chap. XIV]).

W czasie wykładu, powtórzymy za J.-P. Serre'em [4], konstrukcję Baera [1] grupy $\mathrm{Ext}(A, B)$ dla gładkich, przemiennych grup algebraicznych.

Celem wykładu jest podanie charakteryzacji n-torsyjnych elementów w grupie rozszerzeń gładkich, przemiennych grup algebraicznych (patrz [2, 7. Appendix]), dokładniej udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie: Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech A, B będą gładkimi, przemiennymi, n-podzielnymi grupami algebraicznymi nad ciałem F. Załóżmy, że n-torsyjna podgrupa

$$B[n] := \{b \in B : \ [n]b = 0\}$$

grupy B jest skończona. Niech $C \in \mathrm{Ext}(A, B)$ będzie następującym rozszerzeniem grupy A przez B:

$$0 \to B \xrightarrow{i_0} C \xrightarrow{\pi_0} A \to 0.$$

Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. Istnieje izogenia $\psi : \ C \to B \times A$ taka, że
$$\psi(c) := (\beta(c), \pi_0(c)) \quad \text{oraz} \quad \ker \psi = i_0(B[n]),$$
dla pewnego homomorfizmu $\beta : \ C \to B$.

2. Istnieje homomorfizm $s_0 : \ A \to C$ taki, że
$$\pi_0 \circ s_0 = [n].$$

3. C jest elementem rzędu n w $\mathrm{Ext}(A, B)$.

[1] R. Baer, *Erweiterungen von Gruppen und ihren Isomorphismen*, Math. Zeit. **38** (1934), 375–416.

[2] D. Blinkiewicz, *Local to global principle for semiabelian varieties isogenous to the product of an abelian variety and a torus*, Acta Arith. **200** (2021), 221–258.

[3] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Math. Ser. **19**, 1956.

[4] J.-P. Serre, *Algebraic Groups and Class Fields*, Grad. Texts in Math. **117**, Springer-Verlag New York Inc., 1988.

NIEPROSTE POWIERZCHNIE ABELOWE

Paweł Borówka
Uniwersytet Jagielloński
Pawel.Borowka@uj.edu.pl

Niech $\mathcal{A}_d$ będzie przestrzenią moduli powierzchni abelowych z polaryzacją typu $(1, d)$, a podzbiór powierzchni nieprostych oznaczmy przez

$$\mathcal{E}_d(m, n) = \{A \in \mathcal{A}_d,\ \text{A zawiera komplementarne krzywe eliptyczne o wyróżnikach } m, n\}.$$

Na podstawie [1], pokażemy, że niepustość oraz liczba składowych nierozkładalnych $\mathcal{E}_d(m, n)$ zależy od liczby orbit pewnego działania grup symplektycznych na przestrzeni symplektycznej wymiaru 4 nad $\mathbb{Z}_d$. Jako zastosowanie pokażemy, że istnieje krzywa genusu 3 nakrywająca trzy krzywe eliptyczne stopniami d_1, d_2, d_3 wtedy i tylko wtedy gdy $nww(d_1, d_2) = nww(d_1, d_3) = nww(d_2, d_3)$.

[1] R. Auffarth, P. Borówka, *Non-simple polarised abelian surfaces and genus 3 curves with completely decomposable Jacobians*, arXiv:2111.11799, 2021.

METODY ALGEBRAICZNE W TEORII RAMSEYA

Jakub Byszewski
Uniwersytet Jagielloński
jakub.byszewski@uj.edu.pl

Teoria Ramseya bada sytuacje, w których dla dowolnego podziału pewnej struktury na kilka kawałków co najmniej jeden z kawałków posiada podobne własności, co cała wyjściowa struktura. Pojęcie struktury jest tu rozumiane bardzo szeroko i może być bardzo słabe; dla przykładu, równanie algebraiczne określone na pewnej przestrzeni parametrów nazywamy podziałowo regularnym, jeśli dla dowolnego podziału tej przestrzeni na kilka kawałków w co najmniej jednym z kawałków podziału istnieje rozwiązanie tego równania. Jeden z pierwszych wyników teorii Ramseya (twierdzenie Schura) głosi, że równanie $x + y = z$ rozważane w liczbach naturalnych jest podziałowo regularne.

Celem referatu będzie omówienie pewnych metod algebraicznych mających zastosowanie w teorii Ramseya. Omówię pobieżnie klasyczne metody wykorzystujące strukturę algebraiczną uzwarcenia Čecha–Stone'a (np. półgrupy liczb naturalnych) i pozwalające na wykazywanie twierdzeń kombinatorycznych (np. takich jak podziałowa regularność pewnych równań) przy pomocy metod teorii układów dynamicznych (a także na odwrót!); kluczową rolę odgrywa tutaj struktura (prawych i lewych) ideałów w uzwarceniu Čecha–Stone'a. Omówię również, w jaki sposób można zastosować te metody do pytania o opis zbiorów liczb naturalnych opisywalnych przy pomocy równań algebraicznych z dodatkowym wykorzystaniem operacji brania części całkowitej. Wykorzystywane tutaj struktury algebraiczne są bardzo nieprzemienne; w drugiej, komplementarnej, części referatu powiem o tym, w jaki sposób metody algebry przemiennej (ideały pierwsze stowarzyszone, pierścienie lokalne regularne) można wykorzystać do wykazania, że pewne układy równań liniowych (w dowolnych pierścieniach) nie są podziałowo regularne.

Referat oparty jest na wspólnych pracach z Jakubem Koniecznym oraz Elżbietą Krawczyk.

[1] J. Byszewski, J. Konieczny, *Sparse generalised polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 11, 8081–8109.

[2] J. Byszewski, J. Konieczny, *Pisot numbers, Salem numbers, and generalised polynomials*, arXiv:2302.06242.

[3] J. Byszewki, E. Krawczyk, *Rado's theorem for rings and modules*, J. Combin. Theory Ser. A **180** (2021), 55–56, Paper No. 105402, 28 pp.

DOBRE PODZIAŁY ZBIORU LICZB NATURALNYCH

Karol Gryszka
Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie
karol.gryszka@up.krakow.pl

Podział zbioru $\{1, \ldots, n\}$ kolejnych liczb naturalnych nazywamy dobrym, jeśli w każdym uporządkowanych zbiorze podziału każde dwie sąsiadujące liczby sumują się do pewnej potęgi liczby całkowitej. Podział taki realizują na przykład

$$\{(1,7),(2,6),(3,5),(4)\}$$

oraz

$$\{(1,8),(2,7,9),(3,6,10),(4,5,11)\}.$$

W trakcie prezentacji pokażę oryginalny problem oraz jego uogólnienie – pokażę istnienie dobrego podziału dla dowolnej potęgi. Przedyskutuję również kwestię optymalności podziału oraz liczby dobrych podziałów. W ostatniej części przedstawię dalsze uogólnienie problemu oraz wyniki częściowe, uzyskane dla tak postawionego zagadnienia.

SKŁADOWE JEDNORODNE PARY WIELOMIANÓW O NISKIM STOPNIU NAWIASU POISSONA (CZĘŚĆ 1 I 2)

Daria Holik, Marek Karaś
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
holikd@agh.edu.pl
mkaras@agh.edu.pl

Niech k będzie ciałem charakterystyki zero oraz niech $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ będą wielomianami n zmiennych nad ciałem k. Wiadomym jest, iż dla dowolnych f, g mamy (patrz np. [3, 4])

$$\deg[f, g] \leq \deg f + \deg g,$$

gdzie $[f, g]$ jest nawiasem Poissona pary wielomianów f, g, który zdefiniowany jest jako suma

$$[f, g] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j],$$

a zbiór symboli $\{ [x_i, x_j] \ : \ 1 \leq i < j \leq n \}$ (można powiedzieć, że z definicji) stanowi bazę $k[x_1, \ldots, x_n]$-modułu wolnego $\{ \sum_l h_l[f_l, g_l] \ : \ h_l, f_l, g_l \in k[x_1, \ldots, x_n] \}$. Ponadto, gdy powyższa nierówność jest ostra, wtedy istnieją (patrz [3, 4]) $\alpha, \beta \in k,\ r, s \in \mathbb{N}$ oraz wielomian $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ takie, że

$$\bar{f} = \alpha h^r, \ \bar{g} = \beta h^s,$$

gdzie $\bar{f}, \bar{g}$ oznacza formę wiodącą odpowiednio wielomianu f, g.

W trakcie pierwszej części referatu zaprezentowane zostaną zależności pomiędzy składowymi jednorodnymi tych wielomianów przy założeniu, że stopień nawiasu Poissona pary f, g jest odpowiednio niski [1]. W szczególności, przy założeniu $\deg f \leq \deg g$, będą przedstawione jawne formuły na składowe jednorodne wielomianu g przy pomocy składowych jednorodnych wielomianu f. Formuły te uogólniają wyniki pracy [2].

Ponadto w drugiej części referatu zostanie przedstawiona relacja pomiędzy składowymi jednorodnymi odpowiednio stopni $\deg f - 1$ oraz $\deg f - 2$ wielomianu f, a także kilka wyników dotyczących podzielności (przez h) składowej jednorodnej stopnia $\deg f - 1$.

[1] D. Holik, M. Karaś, *Dependence between homogeneous components of polynomials with small degree of Poisson bracket,* Ann. Pol. Math. **128** (2022) no. 2, 121–142.

[2] F.L. Pritchard, *Polynomial mappings with Jacobian determinant of bounded degree,* Arch. Math. (Basel) **48** (1987), 495–504.

[3] I.P. Shestakov, U.U. Umirbaev, *The Nagata automorphism is wild,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **100** (2003), 12561–12563.

[4] I.P. Shestakov, U.U. Umirbaev, *Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials,* J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 181–196.

STERTY, WIĄZARY I STERTY HOPFA

Małgorzata E. Hryniewicka
Wydział Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku
margitt@math.uwb.edu.pl

W latach dwudziestych XX wieku H. Prüfer [3, strona 170] oraz R. Baer [1, strona 202] zdefiniowali *stertę* jako system algebraiczny $(H, [-,-,-])$ złożony z niepustego zbioru H oraz operacji ternarnej $[-,-,-]\colon H \times H \times H \to H$, $(x,y,z) \mapsto [x,y,z]$ spełniającej łączność $[[x,y,z],t,u] = [x,y,[z,t,u]]$ oraz tożsamość Mal'ceva $[x,x,y] = [y,x,x] = y$ dla wszystkich $x,y,z,t,u \in H$. Stertę $(H, [-,-,-])$ nazywamy *abelową*, gdy $[x,y,z] = [z,y,x]$ zachodzi dla wszystkich $x,y,z \in H$. Startując od sterty $(H, [-,-,-])$, przejdziemy do grupy $(H, \circ_e, e)$ poprzez ustalenie w operacji ternarnej $[-,-,-]$ środkowego elementu, to jest dla dowolnego ustalonego $e \in H$, kładąc $x \circ_e y := [x,e,y]$ dla wszystkich $x,y \in H$, zadamy na H strukturę grupy. Na odwrót, każdą grupę $(G, \circ, 1)$ przekształcimy w stertę $(G, [-,-,-]_\circ)$, definiując operację ternarną $[x,y,z]_\circ := x \circ y^{-1} \circ z$ dla wszystkich $x,y,z \in G$. Stertę możemy więc rozumieć jako grupę bez wyróżnionego elementu neutralnego. Wybór elementu w stercie redukuje operację ternarną do binarnej, zadając na wyjściowym zbiorze strukturę grupy, w której wskazany element pełni rolę elementu neutralnego. Wzbogacenie sterty o operację binarną łączną i dystrybutywną względem operacji ternarnej jest naturalnym procesem naśladującym proces przekształcenia grupy w pierścień. W 2019 roku, T. Brzeziński [2] zdefiniował *wiązar* jako system algebraiczny $(T, [-,-,-,], \cdot)$ złożony z niepustego zbioru T, operacji ternarnej $[-,-,-]$ przekształcającej T w stertę abelową oraz operacji binarnej $\cdot$ definiującej na T strukturę półgrupy i spełniającej dystrybutywność $x \cdot [y,z,t] = [x \cdot y, x \cdot z, x \cdot t]$ oraz $[x,y,z] \cdot t = [x \cdot t, y \cdot t, z \cdot t]$ dla wszystkich $x,y,z \in T$. Ostatnim celem wystąpienia będzie zdefiniowanie stert Hopfa.

[1] R. Baer, *Zur Einführung des Scharbegriffs*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **160** (1929), 199–207.

[2] T. Brzeziński, *Trusses: Between braces and rings*, Transactions of the American Mathematical Society **372** (2019), 4149–4176.

[3] H. Prüfer, *Theorie der Abelschen Gruppen. I. Grundeigenschaften*, Mathematische Zeitschrift **20** (1924), 165–187.

[4] T. Brzeziński, M. Hryniewicka, *Translation Hopf algebras and Hopf heaps*, https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.13154.

CHARAKTERYZACJA PIERŚCIENI ZREDUKOWANYCH POPRZEZ KRATY ANIHILATORÓW

Małgorzata Jastrzębska
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach
majastrz2@wp.pl

Niech R będzie pierścieniem łącznym z $1 \neq 0$. Z pierścieniem R możemy związać różne kraty, np. kratę ideałów lewostronnych $I_l(R)$, kratę ideałów prawostronnych $I_r(R)$, kratę ideałów dwustronnych $I(R)$ (zob.[1], [2]). W kracie $I_l(R)$ kresy górne i dolne określone są odpowiednio poprzez sumę algebraiczną ideałów lewostronnych oraz ich część wspólną. Analogicznie określa się kresy górne i dolne w kracie $I_r(R)$. Kraty $I_l(R)$ i $I_r(R)$ są modularnę, zupełne i ograniczone, z elementem najmniejszym 0 i największym R. Krata $I(R)$ jest podkratą w obu kratach $I_l(R)$ i $I_r(R)$.

W zbiorze $I_l(R)$ wyróżnia się pewne elementy znane jako lewostronne anihilatory. Przez lewostronny anihilator niepustego podzbioru S w R rozumiemy zbiór

$$l(S) = \{r \in R | rS = 0\}.$$

Prawostronny anihilator zbioru S definiujemy analogicznie. Zbiór $A_l(R)$ wszystkich lewostronnych anihilatorów w R z relacją inkluzji tworzy kratę zupełną i ograniczoną, ale nie jest to na ogół podkrata w kracie $I_l(R)$. Podobna sytuacja dotyczy prawostronnych ideałów i prawostronnych anihilatorów. Wiadomo np. z [3], że kraty $A_l(R)$ oraz $A_r(R)$ nie muszą być modularne.

Celem referatu jest charakteryzacja pierścieni, dla których krata lewostronnych (analogicznie prawostronnych) anihilatorów jest kratą Boole'a ([4]).

[1] R. L. Blair, *Ideal lattices and the structure of rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 136–153.

[2] H. Draskovicova, T. S. Fofanova, V. I. Igoshin, T. Katriniak, M. Kolibiar, N. Y. Komarnitskii, A. V. Mikhalev, B. N. Salii, L. A. Skornyakov *Ordered Sets and Lattices II.* Amer. Math. Soc Transl. Ser. 2, Vol 152, Amer. Mat. Soc, Providence, 1992.

[3] M. Jastrzębska, J. Krempa, *On lattices of annihilators*, Contemp. Math. **634** (2015), 189–196.

[4] M. Jastrzębska, *Rings with Boolean lattice of one-sided annihilators*, Symmetry, **13(10)1909**, (2021).

METODY ANALITYCZNE W BADANIACH ARYTMETYCZNYCH

Jerzy Kaczorowski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
kjerzy@amu.edu.pl

Wykład ma na celu pokazanie na wybranych przykładach, w jaki sposób metody analizy matematycznej mogą być użyte do opisu pewnych subtelnych własności struktur algebraicznych. Podstawową ideą jest wykorzystanie do tego celu specjalnych funkcji zmiennej zespolonej, tak zwanych funkcji dzeta oraz funkcji typu L. Są one najczęściej zdefiniowane jako szeregi Dirichleta, których współczynniki mają interpretację algebraiczną lub geometryczną. Metodologia polega na opisie własności analitycznych tych obiektów, a następnie odczytanie z nich informacji o związanych z nimi strukturach. Pozwala to na odkrycie relacji między pozornie odległymi od siebie tematami badań i, co za tym idzie, głębsze ich zrozumienie.

Omówione zostaną – z konieczności bardzo pobieżnie – następujące tematy:

1. problem rozmieszczenia liczb i ideałów pierwszych,
2. zagadnienia z zakresu ilościowej teorii faktoryzacji w ciałach algebraicznych i półgrupach arytmetycznych,
3. problem rezonansu na przykładzie krzywych eliptycznych.

[1] H. Davenport, *Multiplicative number theory,* second edition. Revised by Hugh L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics, 74. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. xiii+177 pp.

[2] J. Kaczorowski, A. Perelli, *Twists and resonance of L-functions, II*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. 24, 7637–7670.

[3] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers,* third edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xii+708 pp.

LICZBY WARINGA PIERŚCIENI HENSELOWSKICH (CZ.1 I 2

Tomasz Kowalczyk, Piotr Miska
Uniwersytet Jagielloński
tomek.kowalczyk@uj.edu.pl

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jedynką, a n liczbą naturalną $n > 1$. Definiujemy n-tą liczbę Waringa $w_n(R)$ jako najmniejszą taką liczbę naturalną g, że dowolna suma n-tych potęg da się przedstawić jako suma co najwyżej g n-tych potęg.

Niech $(R, \mathfrak{m})$ będzie lokalnym pierścieniem henselowskim, a k ciałem rezydualnym. Wykażemy górne i dolne ograniczenie na $w_n(R)$ w terminach $w_n(k)$ oraz $s_n(k)$, gdzie $s_n(k)$ to tzw. n-ty poziom ciała k. W wielu przypadkach udaje nam się dokładnie wyznaczyć wartość $w_n(R)$. W szczególności, zaprezentowane zostaną wartości $w_n(\mathbb{Z}_p)$ oraz $w_n(\mathbb{Q}_p)$ dla $n = 3, 4, 5$ oraz dowolnego pierwszego p.

[1] T. Kowalczyk, P. Miska, *On Waring numbers of henselian rings*, arXiv:2206.09904 [math.AC].

KOLOROWANIA KRAWĘDZI GRAFÓW PEŁNYCH JAKO REPREZENTACJE ALGEBR CHROMATYCZNYCH

Tomasz Kowalski
Zakład Logiki, UJ
tomasz.s.kowalski@uj.edu.pl

Rozważamy (my czyli referent oraz Badriah Al Juaid, Marcel Jackson i James Koussas z La Trobe University) n-kolorowania krawędzi grafów pełnych. W takim kolorowaniu każdy trójkąt jest pokolorowany jednym, dwoma lub trzema kolorami – jest monochromatyczny, dichromatyczny lub trójchromatyczny. Analizujemy kolorowania zadane przez zabranianie pewnych trójkątów, a wymaganie innych. Na przykład zabraniając trójkątów monochromatycznych, ograniczamy się do kolorowań grafów K_n dla n mniejszego niż liczba Ramseya $R(3, 3, \dots, 3)$, czyli grafy nie mogą być za duże. Ale co się stanie, jeżeli oprócz zabraniania trójkątów monochromatycznych nałożymy dualne wymaganie, że wszystkie nie-monochromatyczne trójkąty muszą być zrealizowane? Wtedy grafy nie mogą być też za małe, czy więc można znaleźć takie kolorowanie?

To są naturalne pytania kombinatoryczne, ale mają też motywację algebraiczną, biorącą się z algebraicznych podstaw rachunków jakościowych, które z kolei znajdują zastosowania między innymi w planowaniu [1], nawigacji [6, 9] i geolokalizacji [10]. Mianowicie język związany z typowym rachunkiem jakościowym wyznacza pewien rodzaj uogólnionej algebry relacji, w sensie Madduxa [8] (uogólnienie na tym polega, że „składanie” relacji nie musi być łączne), a zatem pozwala stosować metody algebraiczne używane w problemach spełniania więzów (constraint satisfaction). Algebraiczne ujęcie rozumowań jakościowych cieszy się sporą popularnością w informatyce teoretycznej, jak widać na przykład z programowych artykułów [2, 3, 5]. Ważne jest w tym kontekście, że problem ustalenia, czy pewna uogólniona algebra relacji jest reprezentowana przez daną sieć więzów (constraint network), okazuje się `NP`-zupełny (zob. [3]), mimo że ten sam problem dla standardowych algebr relacji jest nierozstrzygalny (zob. [4]).

My jednak skupimy się na całkowicie kombinatorycznej stronie rzeczy i rozważymy rodzinę naturalnych kolorowań wykluczających pewne trójkąty i zarazem wymagających pewnych innych trójkątów. Algebry odpowiadające takim kolorowaniom nazwiemy *algebrami chromatycznymi*; ich reprezentowalność sprowadza się do istnienia odpowiednich kolorowań. Okazuje się, że te zagadnienia mają nietrywialne rozwiązania, a przy okazji uogólniają znane z klasycznej teorii (zob. [7]) związki między algebrami relacji a geometriami projektywnymi.

[1] J.F. Allen, *Maintaining knowledge about temporal intervals*, Comm. ACM **26**(11) (1983), 832–843.

[2] F. Dylla, J.H. Lee, T. Mossakowski, T. Schneider, A. Van Delden, J. Van De Ven, D. Wolter, *A Survey of Qualitative Spatial and Temporal Calculi: Algebraic and Computational Properties*, ACM Computing Surveys **50** (2017) Article No.: 7, pp 1–39.

[3] R. Hirsch, M. Jackson, T. Kowalski, *Algebraic foundations for qualitative calculi and networks*, Theoret. Comput. Sci. **768** (2019), 1–27.

[4] R. Hirsch and I. Hodkinson, *Representability is not decidable for finite relation algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 1403–1425.

[5] A. Inants, J. Euzenat, *So, what exactly is a qualitative calculus?*, Artificial Intelligence **289** (2020), 103385, 14 pp.

[6] J.H. Lee, J. Renz, and D. Wolter, *StarVars – Effective reasoning about relative directions.* International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), (2013) pp. 976–982.

[7] R.C. Lyndon, *Relation algebras and projective geometries*, Michigan Math. J. **8** (1961), 21–28.

[8] R. Maddux, *Some varieties containing relation algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **272** (1982), 501–526.

[9] D.H. Perico, P.E. Santos, R.A.C. Bianchi, *Guided navigation from multiple viewpoints using qualitative spatial reasoning*, Spat. Cogn. Comput. **21** (2021), 143–172.

[10] D.A. Randell, Z. Cui, A.G. Cohn, *A spatial logic based on regions and connection.* In 3rd Int. Conf. on Knowledge Representation and Reasoning. Morgan Kaufmann. (1992) pp. 165–176.

METODY ALGEBRAICZNE ZASTOSOWANE W RZEKOMYM DOWODZIE HIPOTEZY JAKOBIANOWEJ

Tadeusz Krasiński
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki, 90-238 Łódź, ul. Banacha 22
tadeusz.krasinski@wmii.uni.lodz.pl

W 2022 roku ukazał się artykuł w Archiv der Mathematik o pozytywnym rozstrzygnięciu Hipotezy Jakobianowej. Jednak w artykule są błędy. W referacie omówię nowe metody algebraiczne zastosowane w pracy oraz wskażę występujące w niej błędy.

[1] W. Bartenwerfer, *The Cremona problem in dimension 2*, Arch. Math. **119** (2022), 53–62.

O REPREZENTACJACH SKOŃCZONYCH GEOMETRII WYPUKŁYCH

Adam Mata
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
adam.mata.dokt@pw.edu.pl

Krata skończona L jest **geometrią wypukłą** (dokładniej: kratą zbiorów domkniętych geometrii wypukłej), gdy jest:

- **sumowo pół-rozdzielna** (ang. join semi-distributive):

$$\forall a, b, c \in L: \ a \vee b = a \vee c \implies a \vee b = a \vee (b \wedge c), \text{ oraz}$$

- **pół-modularna z dołu** (ang. lower semi-modular):

$$\forall\, a, b \in L: \ a \prec a \vee b \implies a \wedge b \prec b,$$

  gdzie $\prec$ oznacza relację nakrywania (poprzednik-następnik).

Wśród równoważnych reprezentacji geometrii wypukłych występują:

- operatory domknięcia z własnością antywymiany,
- rodziny zbiorów dolnych łańcuchów skończonych,
- zbiory elementów iloczynowo-nierozkładalnych,
- bazy implikacyjne.

Interesują nas translacje pomiędzy poszczególnymi reprezentacjami geometrii wypukłych oraz złożoność obliczeniowa algorytmów wykonujących te translacje.

W trakcie referatu zaprezentuję pierwsze wyniki uzyskane w tym kierunku wspólnie z Anną Zamojską-Dzienio z Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej oraz Kirą Adarichevą i Sylvią Silberger z Hofstra University w USA.

WŁASNOŚĆ SR W MONOIDACH I PIERŚCIENIACH

Łukasz Matysiak
Uniwersytet Kazimierza Wielkiego
lukmat@ukw.edu.pl

Niech H będzie monoidem. Przypomnijmy, że element $s \in H$ nazywamy bezkwadratowym, jeśli nie dzieli się przez kwadrat elementu nieodwracalnego. Również przypomnijmy, że element $r \in H$ nazywamy radykalnym, jeśli dla każdego $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ z warunku $r \mid x^n$ wynika $r \mid x$. Wiadomo też, że element radykalny jest bezkwadratowy. W pracy [1] pokazano, że w monoidach preschreierowskich / z NWD / faktorialnych (w pierścieniach z jednoznacznością rozkładu) elementy bezkwadratowe są radykalne. Ponadto, w wielu pracach bada się warunek AP, czyli monoidy / pierścienie, w których elementy nierozkładalne są pierwsze. Pojawiające się przykłady, w których elementy bezkwadratowe są radykalne oraz pewne wyniki dotyczące warunku AP zmotywowały do zdefiniowania warunku SR, czyli warunku mówiącego o tym, że elementy bezkwadratowe są radykalnymi. W referacie omówimy kilka przykładów oraz pewne własności warunku SR. Więcej o własnościach elementów bezkwadratowych i radykalnych, a także o własności SR można znaleźć w pracach [1], [2], [3].

[1] P. Jędrzejewicz, M. Marciniak, Ł.Matysiak, J. Zieliński, *On properties of square-free elements in commutative cancellative monoids*, Semigroup Forum **100** (2020), 850-870.

[2] Ł. Matysiak, *An SR-property in integral domains and monoids*, (2022), `https://lukmat.ukw.edu.pl/files/18An-SR-property-in-integral-domains-and-monoids.pdf`.

[3] Ł. Matysiak, *On square-free and radical factorizations and relationships with the Jacobian conjecture*, accepted in The Asian Journal of Mathematics (2022).

O PIERŚCIENIACH ŁAŃCUCHOWYCH I STRUKTURACH POKREWNYCH

Ryszard Mazurek
Politechnika Białostocka
r.mazurek@pb.edu.pl

Pierścień nazywamy prawostronnie (lewostronnie) łańcuchowym, jeżeli jego ideały prawostronne (lewostronne) tworzą łańcuch, tzn. są liniowo uporządkowane przez relację zawierania. Pierścień, który jest jednocześnie prawostronnie i lewostronnie łańcuchowy, nazywamy pierścieniem łańcuchowym. Pierścienie łańcuchowe są naturalnym uogólnieniem pierścieni waluacyjnych. W trakcie referatu przedstawiony będzie przegląd rezultatów dotyczących pierścieni (jednostronnie) łańcuchowych [1] i struktur pokrewnych (np. pierścieni, których prawostronne ideały anihilatorowe tworzą łańcuch [4], pierścieni z rozdzielną kratą ideałów prawostronnych [6] oraz półgrup, których ideały prawostronne są liniowo uporządkowane [3]). Przedstawione będą także związki pierścieni łańcuchowych z teorią radykałów [2, 5].

[1] C. Bessenrodt, H.H. Brungs, G. Törner, *Right chain rings, part 1*, Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik der Universität Duisburg, 1990, vol. 181.

[2] N.I. Dubrovin, *Chain domains* (Russian), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1980, no. 2, 51–54.

[3] M. Ferrero, R. Mazurek, A. Sant'Ana, *On right chain semigroups*, J. Algebra **292** (2005), no. 2, 574–584.

[4] G. Marks, R. Mazurek, *Rings with linearly ordered right annihilators*, Israel J. Math. **216** (2016), no. 1, 415–440.

[5] R. Mazurek, E. Roszkowska, *Examples of chain domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 3, 661–667.

[6] A.A. Tuganbaev, *Distributive modules and related topics*, Algebra, Logic and Applications, **12**, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1999.

PEWIEN PROBLEM COFANIA OSOBLIWOŚCI

Krzysztof Jan Nowak
Uniwersytet Jagielloński
nowak@im.uj.edu.pl

Udowodnię ogólną wersję następującego twierdzenia o cofaniu osobliwości:

Rozważmy kiełek $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *w zerze skończonego odwzorowania holomorficznego, kiełek zbioru analitycznego* $W \subset \mathbb{C}^n$ *w przestrzeni docelowej i jego przeciwobraz* $V = \phi^{-1}(W)$*. Wtedy jeśli* V *is gładki, takim także jest kiełek* W*.*

W przypadku, gdy kiełek W nie jest zawarty w dywizorze wyjątkowym Z odwzorowania ϕ, $W \not\subset Z$, twierdzenie to zostało udowodnione w [2, 4, 1]. Przypadek, gdy W jest kiełkiem hiperpowierzchni, został ustanowiony w [3].

[1] M.P. Denkowski, *Multiplicity and the pull-back problem*, Manuscripta Math. **149** (2016), 83–91.

[2] P. Ebenfelt, L.P. Rothschild, *Images of real submanifolds under finite holomorphic mappings*, Comm. Anal. Geom. **15** (2007), 491–507.

[3] L. Giraldo, R.K. Roeder, *Pulling back singularities of codimension one objects*, Proc. AMS **148** (2020), 1207–1217.

[4] J. Lebl, *Pullback of varieties by finite maps*, arXiv:0812.2498 [math.CV] (2008).

PIERŚCIENIE Z AMALGAMACJĄ

Marta Nowakowska
Uniwersytet Śląski
marta.nowakowska@us.edu.pl

Niech A, B będą pierścieniami przemiennymi z jedynką, J ideałem pierścienia B oraz $f : A \to B$ homomorfizmem pierścieni A oraz B. W [1] zostało wprowadzone pojęcie pierścienia z amalgamacją, czyli zbioru postaci $A \bowtie^f J := \{(a, f(a) + j) \mid a \in A, j \in J\}$ z działaniami dodawania i mnożenia po współrzędnych. Ta konstrukcja uogólnia wiele istniejących konstrukcji np. duplikację pierścienia wzdłuż ideału, idealizację Nagaty czy konstrukcje $A+XB[X]$ oraz $A+XB[[X]]$ i jest również związana z konstrukcją D.D. Andersona.

Na referacie zostaną przedstawione nowe wyniki tzn. wybrane własności i charakteryzacje pierścieni z amalgamacją w sytuacji ogólniejszej, gdy pierścienie A oraz B są jedynie łączne (bez jedynki), rozszerzając tym samym istniejące wyniki dla pierścieni przemiennych.

[1] M. D'Anna, C. A. Finocchiaro and M. Fontana, *Amalgamated algebras along an ideal*, Comm. Algebra Appl., Walter De Gruyter (2009), 155–172.

PRZETASOWANE KWADRATY

Bartłomiej Pawlik
Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska
bpawlik@polsl.pl

Słowo W nazywamy *przetasowanym kwadratem*, jeżeli można je rozdzielić na dwa rozłączne identyczne podsłowa. Przykładowo, 101000 jest przetasowanym kwadratem (rozkłada się na podsłowa postaci 100), natomiast 100010 nie ma tej własności. Nietrudno zauważyć, że jeżeli słowo binarne jest przetasowanym kwadratem, to musi ono zawierać parzystą liczbę wystąpień litery 0 i parzystą liczbę wystąpień litery 1. Przedstawiony wcześniej przykład pokazuje, że parzysta liczba liter 0 i 1 nie jest warunkiem wystarczającym, aby dane słowo było przetasowanym kwadratem. Istotnie, określenie, czy dane słowo jest przetasowanym kwadratem, nawet nad binarnym alfabetem, jest problemem NP-zupełnym [1].

Przetasowane kwadraty są pojęciem wprowadzonym dekadę temu przez Henshalla, Rampersada i Shallita [4]. Wciąż niewiele o nich wiadomo; przykładowo nie jest znany wzór jawny na liczbę przetasowanych kwadratów danej długości, choć dysponujemy pewną asymptotyką [3] — w szczególności, nie wiadomo, ile jest binarnych przetasowanych kwadratów długości $2n$ już dla $n = 20$ [5]. W referacie zostanie przedstawiony dotychczasowy stan wiedzy na temat przetasowanych kwadratów [3, 4], a następnie poruszymy temat drobnych uzupełnień i nieśmiałych uogólnień [2]. Skupimy się przede wszystkim na przypadku binarnym.

[1] L. Bulteau, S. Vialette, Recognizing binary shuffle squares is NP-hard, *Theor. Comput. Sci.* **806** (2020), 116–132.

[2] J. Grytczuk, B. Pawlik, M. Pleszczyński, Variations on shuffle squares, w przygotowaniu.

[3] X. He, E. Huang, I. Nam, and R. Thaper, Shuffle Squares and Reverse Shuffle Squares, arXiv preprint *arXiv:2109.12455*, (2021).

[4] D. Henshall, N. Rampersad, J. Shallit, Shuffling and Unshuffling, *Bulletin of EATCS* **107** (2012), 131–142.

[5] https://oeis.org/A191755 (widziano 12 kwietnia 2023 r.)

WIĄZARY I ICH ZWIĄZKI Z E-GRUPAMI

K. Pryszczepko & R.R. Andruszkiewicz
Wydział Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku,
Ciołkowskiego 1M, 15-245 Białystok
karolp@math.uwb.edu.pl

Sterta abelowa jest to zbiór H z ternarną operacją $[-,-,-]$ taką, że dla dowolnych $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \in H$:

$$[h_1, h_2, [h_3, h_4, h_5]] = [[h_1, h_2, h_3], h_4, h_5], \tag{1}$$

$$[h_1, h_1, h_2] = h_2 \quad \& \quad [h_1, h_2, h_2] = h_1, \tag{2}$$

$$[h_1, h_2, h_3] = [h_3, h_2, h_1]. \tag{3}$$

Dla dowolnego ustalonego elementu $e \in H$ określamy działanie dwuargumentowe $+_e$ w zbiorze H, przyjmując, że

$$a +_e b = [a, e, b].$$

Wówczas $(H, +_e, e)$ jest grupą abelową zwaną **retraktem** stery H i $-_e h = [e, h, e]$ dla $h \in H$. Ponadto dla dowolnych $e, f \in H$ grupy $(H, +_e, e)$ i $(H, +_f, f)$ są izomorficzne. Na odwrót, jeżeli $(A, +)$ jest grupą abelową i $[a, b, c] = a - b + c$ dla dowolnych $a, b, c \in A$, to $(A, [-,-,-])$ jest stertą abelową.

Wiązarem nazywamy zbiór T z ternarną operacją $[-,-,-]$ i z dwuargumentowym łącznym działaniem $\cdot$ zwanym mnożeniem, przy czym $(T, [-,-,-])$ jest stertą abelową oraz dla dowolnych $a, b, c, d \in T$:

$$a \cdot [b, c, d] = [a \cdot b, a \cdot c, a \cdot d] \quad \& \quad [a, b, c] \cdot d = [a \cdot d, b \cdot d, c \cdot d]. \tag{4}$$

Przemienny pierścień P z jedynką nazywamy E-pierścieniem, jeżeli P jest izomorficzny z pierścieniem endomorfizmów grupy addytywnej P^+ pierścienia P. Natomiast E-grupą nazywamy każdą grupę izomorficzną z grupą addytywną pewnego E-pierścienia. Wiadomo, ze przemienny pierścień z jedynką $(P, +, \cdot, 0, 1)$ jest E-pierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkimi endomorfizmami grupy P^+ sa lewostronne mnożenia l_a przez dowolny element $a \in P$.

Celem wystąpienia jest przedstawienie podstawowych własności wiązarów i ich związków z E-grupami i E-pierścieniami.

[1] R.R. Andruszkiewicz, T. Brzeziński, B. Rybołowicz, *Ideal ring extensions and trusses*, J. Algebra **600** (2022), 237–278.

[2] R.R. Andruszkiewicz, K. Pryszczepko, *On retracts determinating commutative trusses*, Int. J. Algebra Comput. (to appear), https://doi.org/10.1142/S0218196723500248

[3] T. Brzeziński, *Trusses: Between braces and rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), 4149–4176.

KLASA CIAŁ ŁAGODNYCH Z WALUACJĄ I JEJ UOGÓLNIENIA

Anna Rzepka
Uniwersytet Śląski w Katowicach
anna.rzepka@us.edu.pl

Ciała łagodne odgrywają istotną rolę w próbach rozwiązania problemów otwartych w teorii waluacji, geometrii algebraicznej i teorii modeli ciał z waluacją. Silne własności ciał łagodnych pozwoliły na rozstrzygnięcie wielu problemów dla tej klasy ciał. Naturalne jest zatem pytanie, czy istnieją większe klasy ciał, które nadal posiadają silne własności z punktu widzenia teorii waluacji. Celem referatu jest przedstawienie nowych uogólnień klasy ciał łagodnych oraz własności takich ciał. Szczególna uwaga zostanie zwrócona na problem istnienia we wspomnianych klasach ciał rozszerzeń z defektem, które stanowią jedną z głównych przeszkód w rozwiązaniu ważnych problemów otwartych w teorii waluacji ciał o dodatniej charakterystyce.

Przedstawione wyniki powstały we współpracy z prof. F.-V. Kuhlmannem oraz mgr. P. Szewczykiem.

[1] F.-V. Kuhlmann, A. Rzepka, *The valuation theory of deeply ramifed fields and its connection with defect extension*, Trans. Amer. Math. Soc. **376** (2023), 2693–2738.

[2] A. Rzepka, P Szewczyk, *Defect extensions and a characterization of tame fields*, arXiv:2209.03308.

GEOMETRIA KRZYWYCH ELIPTYCZNYCH NORMALNYCH STOPNIA 6

Anatoli Shatsila
Uniwersytet Jagielloński
anatoli.shatsila@student.uj.edu.pl

Z Twierdzenia Riemanna-Rocha wynika, że dla krzywej eliptycznej C nad ciałem liczb zespolonych istnieje zanurzenie φ w przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^{n-1}$ takie, że $\varphi(C)$ ma stopień n. Co więcej, odpowiedni wybór bazy $H^0(\mathcal{O}_C(nO))$ indukuje działanie dyskretnej grupy Heisenberga wymiaru n na współrzędnych krzywej zanurzonej, co daje bogatą geometrię. W referacie będziemy rozważać przypadek $n = 6$. Najpierw znajdziemy równania elementów bazy przestrzeni kwadryk zawierających $\varphi(C)$, a potem skupimy się na obrazach C_P, C_{PQ} krzywej $\varphi(C)$ przez rzutowanie z generycznego punktu P oraz generycznej prostej $\overline{PQ}$ w $\mathbb{P}^5$. W obu przypadkach znajdziemy minimalną liczbę generatorów ideałów.

CAŁKOWITA DODATNIOŚĆ MACIERZY RIORDANA

Roksana Słowik
Katedra Matematyki, Politechnika Śląska
roksana.slowik@polsl.pl

W trakcie referatu zostaną przedstawione wyniki związane z całkowitą dodatniością macierzy Riordana. Rozpoczniemy od przypomnienia (różnych) warunków wystarczających dla macierzy Riordana zapewniających ich całkowitą dodatniość [3, 4, 5]. Następnie pokażemy, że warunki te nie są warunkami koniecznymi [1, 2].

[1] R. Słowik, *Some (counter)examples on totally positive Riordan arrays*, Linear Algebra Appl. **594** (2020), 117–123.

[2] R. Słowik, *Corrigendum to: 'Some (counter)examples on totally positive Riordan arrays'*, Linear Algebra Appl. **619** (2021), 338-339.

[3] X. Chen, H. Liang, Y. Wang, *Total positivity of Riordan arrays*, Eur. J. Comb. **46** (2015), 68–74.

[4] X. Chen, Y. Wang, *Notes on the total positivity of Riordan arrays*, Linear Algebra Appl. **569** (2019), 156–161.

[5] J. Mao, L. Mu, Y. Wang, *Yet another criterion for the total positivity of Riordan arrays*, Linear Algebra Appl. **634** (2022), 106–111.

WYZNACZNIKI HANKELA ZWIĄZANE Z WAŻONĄ SUMĄ CYFR BINARNYCH

Bartosz Sobolewski
Uniwersytet Jagielloński
bartosz.sobolewski@uj.edu.pl

Dla ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o elementach z pewnego ciała definiujemy macierze Hankela

$$H(n) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_2 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & a_{2n-3} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-3} & a_{2n-2} \end{bmatrix},$$

a ich wyznaczniki nazywamy wyznacznikami Hankela. W ostanich latach szeroko badane były własności wyznaczników Hankela dla ciągów automatycznych, to znaczy ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dla których można obliczyć a_n przy pomocy automatu czytającego cyfry zapisu n w zadanej bazie. Wyniki te umożliwiły między innymi wyznaczenie wykładnika niewymierności dla liczb rzeczywistych o cyfrach zadanych przez wyrazy ciągu Thuego–Morse'a oraz ciągu składania papieru (*paperfolding sequence*).

W trakcie referatu skupię się na wyznacznikach Hankela dla powiązanej rodziny ciągów, opisujących ważoną sumę cyfr binarnych. Dokładniej, dla ustalonego ciągu wag $\mathbf{w} = (w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ oraz liczby $n \in \mathbb{N}$ o zapisie binarnym $n = 2^k\varepsilon_k + 2^{k-1}\varepsilon_{k-1} + \cdots + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_0$, definiujemy ważoną sumę cyfr binarnych

$$s_{\mathbf{w}}(n) = w_k\varepsilon_k + w_{k-1}\varepsilon_{k-1} + \cdots + w_1\varepsilon_1 + w_0\varepsilon_0.$$

Wykażę ogólny wzór na wartości wyznaczników Hankela dla $a_n = s_{\mathbf{w}}(n+1) - s_{\mathbf{w}}(n)$, który uogólnia rezultat Fokkinka, Kraaikampa i Shallita [1] dla ciągu podwajania okresu (*period-doubling sequence*). Dla wag $w_j = t^j$ oraz ciągu $a_n = s_{\mathbf{w}}(n)$ podam natomiast rezultaty dotyczące znikania nieskończenie wielu wyznaczników Hankela, a także ich podzielności w przypadku $t \in \mathbb{Z}$.

Referat na podstawie wspólnej pracy z Maciejem Ulasem.

[1] R. Fokkink, C. Kraaikamp, J. Shallit, *Hankel matrices for the period-doubling sequence*, Indag. Math. **28** (2017), no. 1, 108–119.

LOKALNA ZANURZALNOŚĆ GRUP METRYCZNYCH

Ireneusz Sobstyl
Politechnika Śląska
irensob220@student.polsl.pl

Pojęcie lokalnej zanurzalności grup zostało wprowadzone przez Gordona i Vershika w celu zdefiniowania klasy grup lokalnie zanurzalnych w grupy skończone (LEF-grupy). Rozdział 7 książki [2] zawiera podstawową informację dotyczącą tych grup. Najczęściej we współczesnej teorii grup warunek LEF występuje jako uproszczona wersja soficzności. Celem mojego badania jest uogólnienie warunku LEF na grupy metryczne. Jest to motywowane tym, że współczesna teoria aproksymowalności grup (i np. pojęcie soficzności) jest oparta na aparacie grup metrycznych.

Niech $\mathcal{C}$ będzie klasą grup (pseudo)metrycznych z niezmienniczymi (pseudo)metrykami. Powiemy, że grupa (pseudo)metryczna (G, d) z niezmienniczą (pseudo)metryką jest **metrycznie lokalnie zanurzalna** w $\mathcal{C}$ jeśli dla każdych skończonych podzbiorów $K \subset G, Q \subset \mathbb{Q}$ istnieje $(C, d_C) \in \mathcal{C}$ i injekcja $\varphi : K \to C$ spełniająca następujące warunki:

- $(\forall k_1, k_2 \in K)(k_1 \cdot k_2 \in K \to \varphi(k_1 \cdot k_2) = \varphi(k_1) \cdot \varphi(k_2))$;
- dla każdej (nie)równości postaci $d(k_1, k_2) \square q$ gdzie $k_1, k_2 \in K$, $q \in Q$ i symbol $\square$ jest wzięty z $\{<, =, >\}$, zachodzi też (nie)równość $d_C(\varphi(k_1), \varphi(k_2)) \square q$ w grupie (C, d_C).

Grupę metryczną (G, d) z niezmienniczą metryką nazywamy grupą **LEF-metryczną**, jeśli (G, d) jest lokalnie zanurzalna w klasie grup skończonych z niezmienniczymi metrykami.

Okazuje się, że dla każdej grupy rezydualnie skończonej G można dobrać niezmienniczą metrykę d w taki sposób, żeby (G, d) była LEF-metryczna. Pokazujemy również, że wiele standardowych stwierdzeń dotyczących warunku LEF (większość stwierdzeń Rozdziału 7 książki [2]) ma odpowiedniki w przypadku LEF-metryczności.

Jednym z najciekawszych kierunków badania LEF-metryczności jest badanie grup z niezmienniczymi metrykami słownymi. Gdy $G = \langle S \rangle$ i $\overline{S} = S^G$ jest domknięciem S ze względu na sprzężenia, definiujemy (zgodnie z [1]) niezmienniczą normę słowną $|| \cdot || : G \to \mathbb{N}$ w następujący sposób:

$$||g|| := \min\{k \in \mathbb{N} : g = s_1 \dots s_k, s_i \in \overline{S}\}.$$

Niezmiennicza metryka słowna d_S jest definiowana wzorem: $d_S(g_1, g_2) = ||g_1 g_2^{-1}||$.

Warunek LEF dla grupy skończenie generowanej G nie implikuje LEF-metryczności odpowiedniej grupy (G, d_S). Jednym z wyników mojej pracy jest stwierdzenie, że pewna grupa postaci $H \rtimes_\psi \mathbb{Z}$, (zdefiniowana w [2] jako G_1), która nie jest rezydualnie skończona wciąż jest LEF-metryczna względem standardowej niezmienniczej metryki słownej.

[1] M. Brandenbursky, Ś.R. Gal, J. Kędra, M. Marcinkowski *The cancellation norm and the geometry of bi-invariant word metrics*, Glasgow Mathematical Journal, **58(1)**, 153–176.

[2] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *Cellular Automata and Groups*, Springer, 2010

PRZECIĘCIA PODGRUP MAKSYMALNYCH W GRUPACH SKOŃCZONYCH

Agnieszka Stocka
Wydział Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku
ul. K. Ciołkowskiego 1M, 15-245 Białystok
stocka@math.uwb.edu.pl

Niech G będzie grupą skończoną oraz $I = \{1, \ldots, n\}$. Rodzinę $\mathcal{M} = \{M_i : i \in I\}$ maksymalnych podgrup grupy G będziemy nazywać *nieredukowalną*, jeśli dla każdego $i \in I$

$$\bigcap_{j \in I} M_j < \bigcap_{i \neq j \in I} M_j.$$

Celem referatu jest przedstawienie własności nieredukowalnych rodzin grup skończonych oraz własności następujących niezmienników:

- $Maxdim(G)$ – *wymiar maksymalny* grupy G – mocy największej nieredukowalnej rodziny podgrup maksymalnych G,
- $Mindim(G)$ – *wymiar minimalny* grupy G – mocy najmniejszej nieredukowalnej rodziny podgrup maksymalnych G,
- $\iota(G)$ – najmniejsza liczba podgrup maksymalnych grupy G, których przecięcie jest równe przecięciu wszystkich podgrup maksymalnych G.

Pierwsze rezultaty dotyczące zbiorów nieredukowalnych pojawiły się w pracy [2], a kontynuowanie w licznych artykułach m. in. [1, 3].

[1] A. Lucchini, *Maximal Intersections in Finite Groups*, Mediterr. J. Math. **19**, 34 (2022).

[2] R. Fernando, *On an inequality of dimension-like invariants for finite groups*, preprint, arXiv:1502.00360, 2015.

[3] A. Stocka, *Irredundant families of maximal subgroups of finite solvable groups*, Int. J. Group Theory **12** (2023), no. 3, 163–176.

NIEMAL WOLNE UKŁADY PROSTYCH I KRZYWYCH ELIPTYCZNYCH

Przemysław Talar
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
p.talar367@gmail.com

Głównym celem referatu będzie omówienie zagadnień związanych z układami krzywych eliptycznych i prostych na zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Podamy kombinatoryczne ograniczenia na osobliwości takich układów przy założeniu, że dopuszczamy proste punkty podwójne, proste punkty potrójne oraz punkty typu A_5. W kolejnym kroku omówimy częściową charakteryzację układów wolnych i niemal wolnych składających się z krzywych eliptycznych oraz prostych z ww. osobliwościami. Przedstawione wyniki badań wchodzą w skład pracy magisterskiej referenta.

CIĄGI GEOMETRYCZNE W ZBIORACH WARTOŚCI FUNKCJI WYMIERNYCH

Maciej Ulas
Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki, Instytut Matematyki
maciej.ulas@uj.edu.pl

Niech $a, Q \in \mathbb{Q}$. Połóżmy $\mathcal{G}(a, Q) = \{aQ^n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Dla $f \in \mathbb{Q}(x, y)$ definiujemy

$$\mathcal{V}_f = \{f(x, y) : \ x, y \in \mathbb{Q} \text{ i } f(x, y) \text{ jest określone}\}.$$

Rozważać będziemy problem istnienia takich $a, Q \in \mathbb{Q}$, że $\mathcal{G}(\dashv, \mathcal{Q}) \subset \mathcal{V}_f$. W pierwszej części wystąpienia, opiszemy kilka klas funkcji wymiernych, dla których sformułowany problem ma pozytywne rozwiązanie. W szczególności, jeśli $f(x, y) = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$, gdzie $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[x, y]$ są jednorodnymi formami stopni d_1, d_2 odpowiednio, i $|d_1 - d_2| = 1$, to wtedy istnieje nieskończenie wiele takich par (a, Q), że $\mathcal{G}(a, Q) \subset \mathcal{V}_f$. W drugiej, eksperymentalnej części referatu, skoncentrujemy się na problemie dla funkcji wymiernej $f(x, y) = (y^2 - x^3)/x$. W tym przypadku, rozważania są ściśle związane z istnienia punktów wymiernych na pewnych krzywych eliptycznych, zaś przeprowadzone obliczenia numeryczne sugerują szereg pytań i hipotez.

ALGEBRA HECKE I OSOBLIWOŚCI KLATEK SCHUBERTA

Andrzej Weber
Uniwersytet Warszawski
aweber@mimuw.edu.pl

Opowiem o związku algebry z geometrią przestrzeni jednorodnych. Przestrzenie jednorodne działania grup liniowych (przestrzenie rzutowe, grassmanniany, przestrzenie flag i ich uogólnienia) mają rozkłady na klatki izomorficzne z przestrzeniami afinicznymi. Domknięcia tych klatek, nazywane rozmaitościami Schuberta, są zbiorami osobliwymi. Obliczanie kohomologicznych niezmienników rozmaitości Schuberta wiąże się z analizą kombinatoryki rządzącej rozwiązaniem osobliwości. Rachunek pozwalający policzyć klasy fundamentalne rozmaitości Schuberta w kohomologiach został przedstawiony przez Bernsteina-Gelfanda-Gelfanda i Demazura. Jest on oparty na działaniu algebry nil-Hecke i może być opisany za pomocą operacji różnic podzielonych na wielomianach. Ciekawszą algebrę otrzymujemy badając K-teorię. Wtedy mamy do czynienia ze zdegenerowaną algebrą Hecke działającą na wielomianach Laurenta. Czysto algebraiczne rozważania doprowadziły G. Lusztiga do konstrukcji działania klasycznej algebry Hecke na K-teorii przestrzeni flag. Całkiem niedawno zostało wykazane przez Aluffiego-Mihalcea-Schürmanna-Su, że iteracje operacji Demazura-Lusztiga obliczają tzw. motywiczne klasy Cherna. Natępnym krokiem jest przeanalizowanie bardziej wyrafinowanych niezmienników rozmaitości Schuberta – klas eliptycznych. Analiza kombinatoryki rozwiązania Botta-Samelsona prowadzi do definicji eliptycznej algebry Hecke (moja praca wspólna z R. Rimányim). Eliptyczna algebra Hecke jest interesująca sama w sobie, relacje w tej algebrze odzwierciedlają tożsamości wiążące funkcje theta Jacobiego.

[1] R. Rimányi, A. Weber, *Elliptic classes of Schubert varieties via Bott–Samelson resolution*, Journal of Topology, **13(3)** (2020), 1139–1182.

ALGEBRY BARYCENTRYCZNE A WSPÓŁRZĘDNE BARYCENTRYCZNE

Anna Zamojska-Dzienio
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
anna.zamojska@pw.edu.pl

Zbiory wypukłe w przestrzeni rzeczywistej n-wymiarowej można przedstawiać algebraicznie jako zbiory z operacjami binarnymi danymi przez średnie ważone, z wagami z (otwartego) odcinka jednostkowego rzeczywistego. Klasa tak zdefiniowanych algebr generuje rozmaitość (klasę definiowaną równościowo) *algebr barycentrycznych.*

W geometrii, istotną rolę odgrywa badanie *współrzędnych barycentrycznych* punktów wewnątrz wielościanów wypukłych, w odniesieniu do wierzchołków. Ma to znaczenie, np. w grafice komputerowej, gdzie szuka się konkretnych metod wyznaczania takich współrzędnych i porównuje ich własności. W moim referacie pokażę, jak można wykorzystać algebry barycentryczne w tym kontekście i jak pozwala to uprościć wiele rezultatów.

Są to wyniki uzyskane razem z Jonathanem D.H. Smithem (Department of Mathematics, Iowa State University) i Anną Romanowską (Wydział MiNI, Politechnika Warszawska).